NOTIONS MATHEMATIQUES

Le But de cette partie est de fournir à l'étudiant une base nécessaire pour traiter les problèmes de la mécanique classique « Newtonienne ».

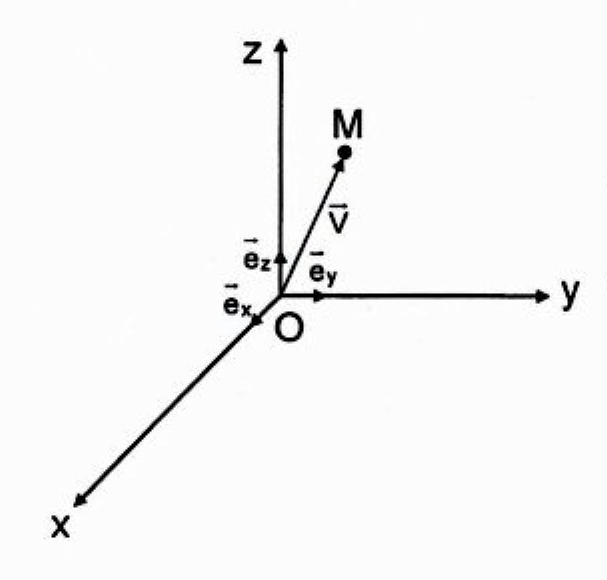
I. Notions sur les vecteurs

I. 1. Définition d'un vecteur

Dans un repère cartésien $\Re\left(O,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z\right)$, un vecteur $\vec{V}$ est défini par trois caractéristiques, qui sont :

- sa direction
- son sens
- son module

Exemple :



$\vec{V}$ a pour direction la droite passant par O

son sens est défini de O à M

son module est $\left\|\vec{V}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

I. 2. Opérations sur les vecteurs

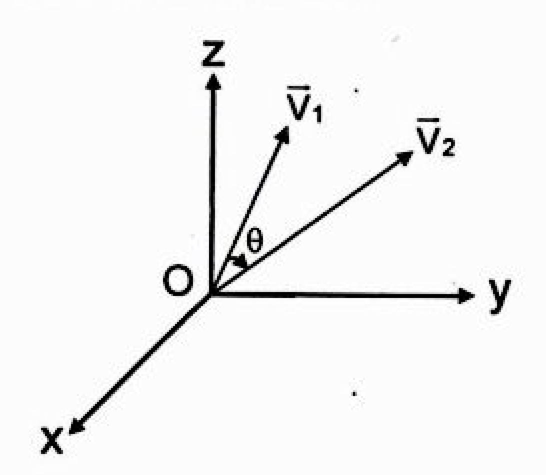
I. 2. 1. Produit scalaire

On définit le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ par :

$$\vec{V}_1.\vec{V}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

ou bien, si on introduit l'angle θ que font les vecteurs entre eux :

$\vec{V}_1.\vec{V}_2 = \|\vec{V}_1\|.\|\vec{V}_2\|.\cos\theta$



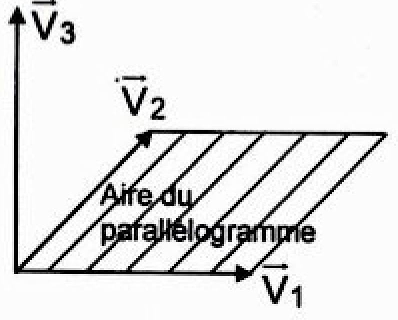
* si $\vec{V}_1 \perp \vec{V}_2 \Rightarrow \vec{V}_1.\vec{V}_2 = 0$

* $\vec{V}_1.\vec{V}_2 = \vec{V}_2.\vec{V}_1$ (commutatif)

* $\lambda(\vec{V}_1.\vec{V}_2) = (\lambda\vec{V}_1).\vec{V}_2 = \vec{V}_1.(\lambda\vec{V}_2)$

I. 2. 2. Produit vectoriel

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ est le vecteur $\vec{V}_3$ tel que : $\vec{V}_3 = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$, qui est défini par :

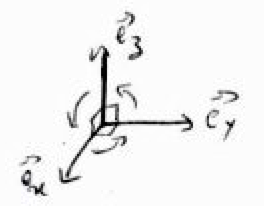


- sa direction, qui est perpendiculaire à $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$
- son sens, est tel que le trièdre $(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3)$ est direct
- son module : $\vec{V}_3 = \|\vec{V}_1\|.\|\vec{V}_2\|.\sin(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$

- Dans une base cartésienne orthonormée $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$:

$$\vec{V}_3 = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (y_1z_2 - z_1y_2)\vec{e}_x - (x_1z_2 - z_1x_2)\vec{e}_y + (x_1y_2 - y_1x_2)\vec{e}_z$$

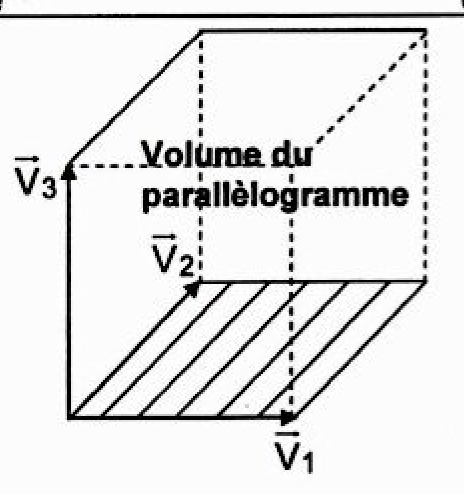
- si $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ sont colinéaires $\Rightarrow \vec{V}_3 = \vec{0}$



- $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = -\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1$
- $\vec{e}_x \wedge \vec{e}_x = \vec{e}_y \wedge \vec{e}_y = \vec{e}_z \wedge \vec{e}_z = \vec{0}$
- $\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y = \vec{e}_z; \vec{e}_y \wedge \vec{e}_z = \vec{e}_x; \vec{e}_z \wedge \vec{e}_x = \vec{e}_y$



I. 2. 3. Produit mixte



Le produit mixte des vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$

est le vecteur $\vec{V}_3$ tel que :



$$\vec{V}_1.(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = \vec{V}_2.(\vec{V}_3 \wedge \vec{V}_1) = \vec{V}_3.(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)$$

I. 2. 4. Double produit vectoriel

Par définition, le double produit vectoriel est comme suit :

$$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = (\vec{V}_1.\vec{V}_3).\vec{V}_2 - (\vec{V}_2.\vec{V}_3).\vec{V}_1$$

⇐ A apprendre

I. 2. 5. Dérivée d'un vecteur

Soit un vecteur $\vec{V}$ dans un espace vectoriel de trois dimensions :

$$\vec{V} = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z$$

Sa dérivée par rapport au temps est :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy(t)}{dt}\vec{e}_y + \frac{dz(t)}{dt}\vec{e}_z + x(t)\frac{d\vec{e}_x}{dt} + y(t)\frac{d\vec{e}_y}{dt} + z(t)\frac{d\vec{e}_z}{dt}$$

- Si le repère est fixe par rapport au temps : $\frac{d\vec{e}_x}{dt} = \frac{d\vec{e}_y}{dt} = \frac{d\vec{e}_z}{dt} = \vec{0}$,

alors : $\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy(t)}{dt}\vec{e}_y + \frac{dz(t)}{dt}\vec{e}_z$

- Si $\vec{V}$ est de module constant : $\|\vec{V}\| = Cte \Rightarrow \|\vec{V}\|^2 = \|\vec{V}\|.\|\vec{V}\| = Cte$,

d'où : $\frac{d\|\vec{V}\|^2}{dt} = \frac{d(\vec{V}.\vec{V})}{dt} = 2\vec{V}.\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{V} \perp \frac{d\vec{V}}{dt}$

$(f^2)' = 2f^{2-1}.f'$

$\frac{dv^2}{dt} = (v^2)' = 2v.v'$

$(f.g)' = f'g + g'f$

<u>Propriétés</u> :

- $\frac{d(\vec{V}_1.\vec{V}_2)}{dt} = \vec{V}_1\frac{d\vec{V}_2}{dt} + \vec{V}_2\frac{d\vec{V}_1}{dt}$

- $\dfrac{d(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)}{dt} = \dfrac{d\vec{V}_1}{dt} \wedge \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \wedge \dfrac{d\vec{V}_2}{dt}$ ⇐ L'ordre ici est important !!

- $\dfrac{d(a\vec{V}_1 + b\vec{V}_2)}{dt} = a\dfrac{d\vec{V}_1}{dt} + b\dfrac{d\vec{V}_2}{dt}$

- $\dfrac{d(f(t).\vec{V})}{dt} = f(t).\dfrac{d\vec{V}}{dt} + \vec{V}.\dfrac{df(t)}{dt}$

I. 2. 6. Moment d'un vecteur

a) par rapport à un point :

- le moment d'un vecteur $\vec{V}(A)$ lié au point A par rapport à un autre point Q est :

$$\vec{M}(Q) = \overrightarrow{QA} \wedge \vec{V}$$

- le moment du vecteur $\vec{V}$ par rapport à un autre point P est comme suit :

$$\vec{M}(P) = \overrightarrow{PA} \wedge \vec{V} = (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QA}) \wedge \vec{V} = \vec{M}(P) + \overrightarrow{PQ} \wedge \vec{V}$$

b) par rapport à un axe :

- le moment d'un vecteur $\vec{V}(A)$ par rapport à un axe Δ est la projection du moment de $\vec{V}(A)$ par rapport à un autre point Q appartenant à Δ :

$$M_\Delta = \vec{u}.\vec{M}(Q) = \vec{u}.(\overrightarrow{QA} \wedge \vec{V})$$ ($\vec{u}$: vecteur unitaire qui porte Δ)

I. 2. 7. Opérations sur les vecteurs

Un champ de vecteurs $\vec{V}(M)$ est l'application qui fait correspondre à tout point M de l'espace affine un vecteur $\vec{V}$ d'un espace vectoriel de même dimension.

a) Gradient d'une fonction : soit une fonction $f(x, y, z)$ réelle définie, et dérivable dans $\Re^3$. La différentielle df s'écrit : $df = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy + \dfrac{\partial f}{\partial z}dz$, qui peut s'écrire aussi : $df = \overrightarrow{grad}\, f.\vec{dl}$

$\vec{dl}$: vecteur déplacement élémentaire, et $\overrightarrow{grad} f$ est le vecteur gradient de f, dont les composantes en coordonnées cartésiennes sont :

(v_1, v_2, v_3 : composants de $\vec{V}$)

$$\overrightarrow{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z = \vec{\nabla}.f$$

$div\,\vec{V} = \vec{\nabla}.\vec{V} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$

avec $\vec{\nabla}$: opérateur nabla = $\frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z$

j'ai Arrêté

I. 3. Equations différentielles

Les lois de physique, et plus particulièrement celles de la mécanique, se traduisent mathématiquement par des équations qui relient des fonctions, dépendant d'une ou plusieurs variables, et leurs dérivées premières et secondes. Ces équations sont appelées équations différentielles.

I. 3. 1. Equation différentielle linéaire de premier ordre

$$A(x)\frac{dy}{dx} + B(x)y = C(x)$$

Pour résoudre cette équation, on passe par deux étapes :

1°/ résolution de l'équation sans second membre : $C(x) = 0$, dont la solution est :

$$\frac{dy}{y} = -\frac{B(x)}{A(x)}dx \text{ , soit } \int\frac{dy}{y} = -\int\frac{B(x)}{A(x)}dx + Cte \Leftrightarrow y_1(x) = K\exp\left(-\int\frac{B(x)}{A(x)}dx\right)$$

2°/ résolution de l'équation avec le second membre : $C(x) \neq 0$

Dans ce cas, la solution générale est la somme d'une solution $y_1(x)$ de l'équation sans second membre, et une solution particulière qu'on retrouve à l'aide de la méthode de la variation de la constante K.

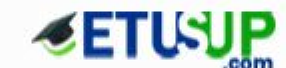
I. 3. 2. Equation différentielle linéaire de second ordre à coeff constants

$ay'' + by + cy = f(x)$

$$a\frac{d^2y(x)}{dx^2} + b\frac{dy(x)}{dx} + c\,y(x) = f(x)$$

a) <u>solution de l'équation sans second membre</u> :

en posant $y(x) = e^{rx}$, on aboutit à l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$



On distingue trois cas : $y'' + ay' + by = 0$

♣ $\Delta > 0$: $r_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$; $r_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\Rightarrow$ la solution est la combinaison linéaire de r_1 et r_2 : $y_1 = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$

♣ $\Delta = 0$: $r = \dfrac{-b}{2a} \Rightarrow y_1 = (c_1 x + c_2)e^{rx}$

♣ $\Delta < 0$: $r_1 = \dfrac{-b+i\sqrt{+\Delta}}{2a} = \alpha + i\beta$; $r_2 = \dfrac{-b-i\sqrt{+\Delta}}{2a} = \alpha - i\beta$

$\Rightarrow y_1 = e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x)$ où $y_1 = Ke^{\alpha x}\cos(\beta x - \varphi)$

K et φ sont des constantes déterminés par les conditions initiales.

$x = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$
$R(t) = at^2 + bt + c$
$\dot{R}(t) = 2at + b$
$\ddot{R}(t) = 2a$

b) <u>solution particulière</u> :

- si le second membre est un polynôme, la solution particulière est aussi un polynôme de même degré si c ≠ 0. Si c = 0 ; le polynôme de degré supérieur.

- si le second membre est sous la forme d'une exponentielle ou produit d'une exponentielle par un polynôme, la solution particulière est de même.

- si le second membre est une fonction sinusoïdale, la solution particulière est une solution de type « A cos(ωx)+ B sin(ωx) ».

$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
$P(x) = A\cos x + B\sin x$
$y \to C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + A\cos x + B\sin x$

<u>Exemples d'application</u> :

1°/ Résoudre $\dot{y}\sin x - y\cos x + \cos^2 x = 0$

2°/ Montrer que $\operatorname{div}\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{V} = 0$ *(avec* $\vec{V}$ *vecteur dans un repère cartésien).*

↳ 2/ résolution de l'éq° diff avec la méthode de la variation de la constante K

solut° particulière : (y_2)

$$A(x)\frac{dK}{dx}\exp\left(-\int\frac{B(x)}{A(x)}dx\right) + A(x)K\frac{d}{dx}\left(\exp\left(-\int\frac{B(x)}{A(x)}dx\right)\right) + B(x).K\exp\left(\int\frac{-B(x)}{A(x)}dx\right) = C(x)$$

⇒ ce qui donne la solution générale, qui est la somme de la solution SSM et la solution ~~générale~~ particulière.

EXEMPLE

- Résoudre $2\dot{y} - y = e^x$


ETUSUP.com